No. Date 4/3/2016

Μαθημα 6ο

Αναλυτικη Γεωμετρια

Εσωτερικο Γινομενο

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Ορθοκανονικο συστημα $\mathbb{R}^k$

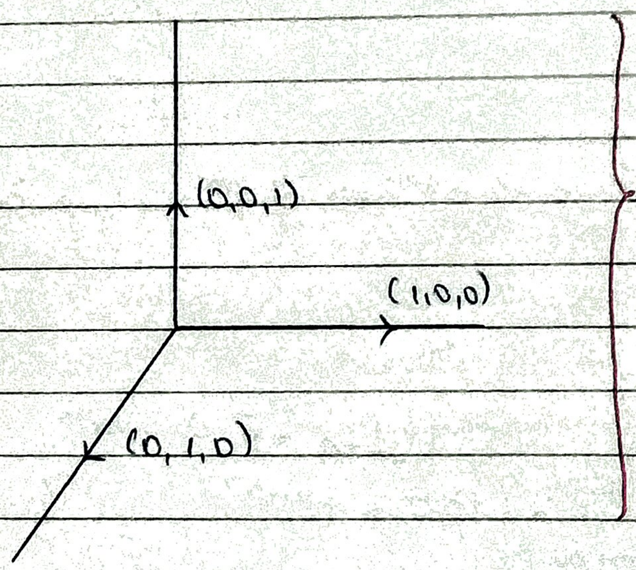
$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \end{aligned}\right\} \quad \vec{a}\,\vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

(*) (x_0, y_0, z_0)

$|x_0| = |y_0| = |z_0| \longrightarrow \vec{a}\,\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,\vec{x_0}\,\vec{y_0}$

$(\quad + \quad)\,\vec{x_0}\,\vec{z_0}$

$(\quad + \quad)\,\vec{y_0}\,\vec{z_0}$



Ορθοκανονικο Συστημα Αναφορας

Ιδιοτητες εσωτερικου γινομενου

(1) Το εσωτερικο γινομενο ειναι αριθμος

(2) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2$, $\vec{a} \neq 0$, $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \vec{0}$ αν και μονο αν $\vec{a} = \vec{0}$

(3) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$

(4) $\langle \lambda\vec{a} + \vec{b}, \vec{\gamma} \rangle = \langle \lambda\vec{a}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{\gamma} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{\gamma} \rangle$

(5) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{0}$ χωρις απαραιτητα $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$

π.χ $(1,0,0) \cdot (0,1,0) = 0$

(2γ)

Απόδειξη

(4) $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{R}^3$

$< \lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma} > = (\lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = (\lambda\alpha_1 + \beta_1, \lambda\alpha_2 + \beta_2, \lambda\alpha_3 + \beta_3)(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) =$

$= (\lambda\alpha_1 + \beta_1)\gamma_1 + (\lambda\alpha_2 + \beta_2)\gamma_2 + (\lambda\alpha_3 + \beta_3)\gamma_3 =$

$= (\lambda\alpha_1\gamma_1 + \lambda\alpha_2\gamma_2 + \lambda\alpha_3\gamma_3) + (\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}) + (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) =$

$= \lambda < \vec{\alpha}, \vec{\gamma} > + < \vec{\beta}, \vec{\gamma} >$

Παρατήρηση

$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$ προφανώς $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \iff < \vec{\alpha}, \vec{\beta} > = 0$

Απόδειξη (Μεθοδολογία καθετότητος)

$< \vec{\alpha}, \vec{\beta} > = 0 \iff |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \iff \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$

$\iff \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

π.χ

$\vec{\alpha} = (1, -1, 2)$, $\vec{\beta} = (-2, -2, 0) \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

Ιδιότητες

(1) Cauchy-Schwartz

$|< \vec{\alpha}, \vec{\beta} >| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

$< \vec{\alpha}, \vec{\alpha} > = |\vec{\alpha}|^2$

(2) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2(|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2)$

$< \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\beta} >$

Απόδειξη

$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = < \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\beta} > = < \vec{\alpha}, \vec{\alpha} + \vec{\beta} > + < \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\beta} > =$

$= < \vec{\alpha}, \vec{\alpha} > + < \vec{\alpha}, \vec{\beta} > + < \vec{\beta}, \vec{\beta} > + < \vec{\beta}, \vec{\alpha} > =$

$= |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2 < \vec{\alpha}, \vec{\beta} >$ (1)

Αντίστοιχα το $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2 < \vec{\alpha}, \vec{\beta} >$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη (1) και (2)

$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2(|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2)$

(3) $|\vec{a} \pm \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Αποδειξη

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b} \rangle = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \le$

$\le |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \le |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| =$

$= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \Rightarrow \quad |\vec{a}+\vec{b}|^2 \le (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \xrightarrow[\text{θετικα}]{\text{ολα}}$

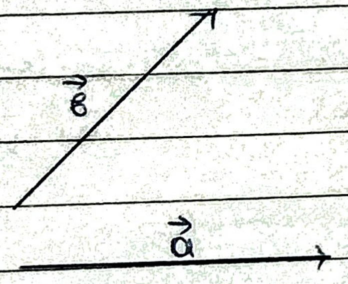
$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Προβολη διανυσματος (σε διανυσμα)

Εστω ενα μη-μηδενικο διανυσμα $\vec{a}$ και εστω αλλο $\vec{b} \neq \vec{0}$.

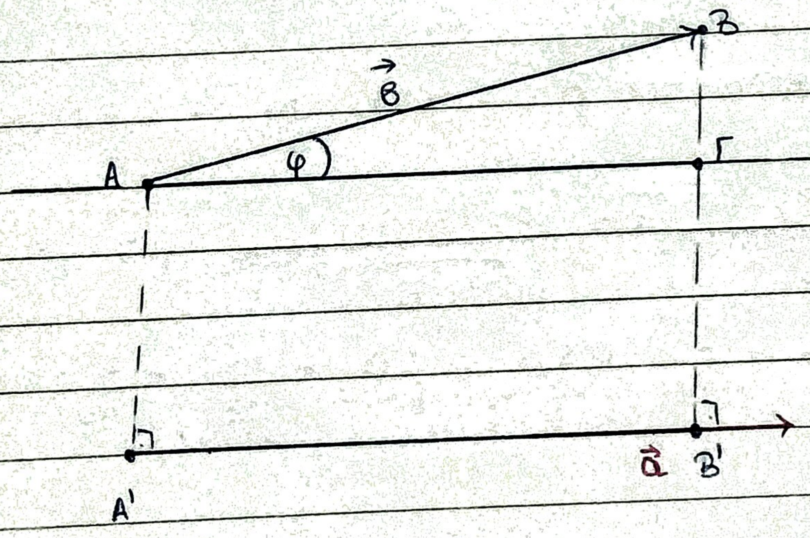
Θα προσδιορισαμε την προβολη του $\vec{b}$ στο $\vec{a}$

Συμβολισμος: $\pi\rho_{\vec{a}}\vec{b}$



$|A'B'| = |A\Gamma|$

$\cos\varphi = \dfrac{|A\Gamma|}{|\vec{b}|} \Rightarrow |A\Gamma| = |\vec{b}| \cos\varphi$



Αριθμητικη προβολη του $\vec{b}$ στο $\vec{a}$

$|A'B'|$ οπου A', B' τα σημεια που τεμνουν οι καθετες απο τα A, B αντιστοιχα την ευθεια που περιεχει το $\vec{a}$

Διανυσματική προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$

Είναι ένα νέο διάνυσμα που έχει μέτρο το $|A'B'|$ και διεύθυνση και φορά αυτή του $\vec{\alpha}$

Τύπος: $$\text{πρ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \underbrace{|\vec{\beta}|\cdot\cos(\vec{\alpha},\vec{\beta})}_{\text{αριθμητική προβολή}}\cdot\underbrace{\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}}_{\text{Είναι πάντα μέτρο 1}}$$

Ισχύει

$$\text{πρ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle}{\langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle}\cdot\vec{\alpha}$$

Πολ/ζω με το $|\vec{\alpha}|/|\vec{\alpha}|$ για να δημιουργήσω το $|\vec{\alpha}|^2$ που θέλω

Απόδειξη

$$\text{πρ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = |\vec{\beta}|\cdot\cos(\vec{\alpha},\vec{\beta})\cdot\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}\cdot\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}|} = \frac{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot\cos(\vec{\alpha},\vec{\beta})\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}||\vec{\alpha}|} =$$

$$= \frac{\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle}{\langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle}\cdot\vec{\alpha}$$

Παράδειγμα

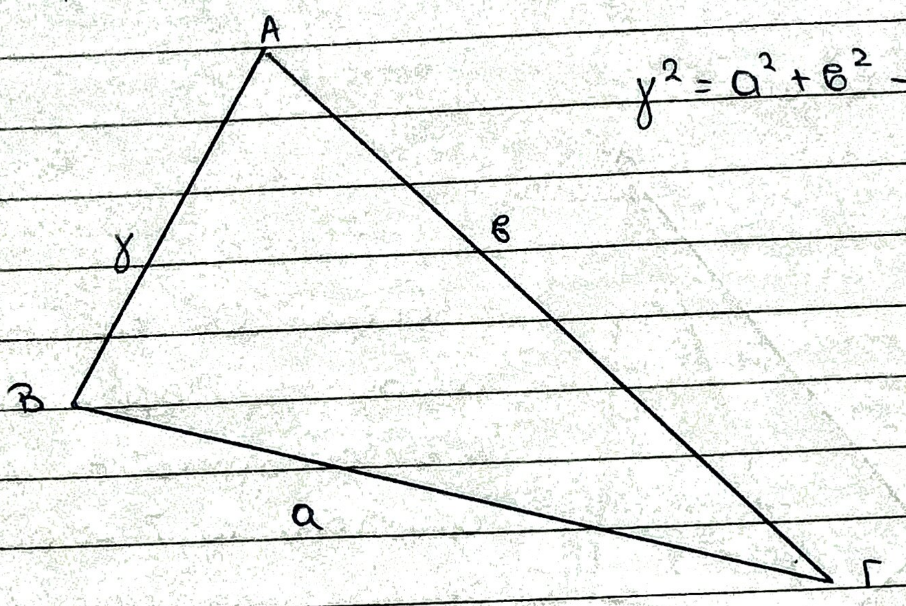
Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\alpha}=(2,-1,1)$ στο $\vec{\beta}=(0,5,1)\in\mathbb{R}^3$

$$\text{πρ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \frac{\langle\vec{\beta},\vec{\alpha}\rangle}{\langle\vec{\beta},\vec{\beta}\rangle}\cdot\vec{\beta} = \frac{2\cdot 0+5(-1)+1\cdot 1}{\left(\sqrt{0^2+5^2+1^2}\right)^2}\cdot(0,5,1) =$$

$$= \frac{-4}{26}(0,5,1) = -\frac{2}{13}(0,5,1) = \left(0,-\frac{10}{13},-\frac{2}{13}\right)$$

Εφαρμογη

Ο νομος των συνημιτονων για τριγωνο ΑΒΓ



$$\gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2a\beta\cdot\cos\Gamma$$

Παρατηρουμε οτι $\vec{BA} = \vec{\Gamma A} - \vec{\Gamma B}$ παιρνω ως αρχη των αξονων το σημειο Γ

Αρχη το Ο:

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ μπορω και το γραφω ως τις συντεταγμενες τελους μειον αρχης

$$|\vec{BA}|^2 = |\vec{BA}||\vec{BA}| = (\vec{\Gamma A} - \vec{\Gamma B})(\vec{\Gamma A} - \vec{\Gamma B}) = \vec{\Gamma A}\cdot\vec{\Gamma A} - \vec{\Gamma A}\cdot\vec{\Gamma B} - \vec{\Gamma B}\cdot\vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B}\cdot\vec{\Gamma B} =$$

$$= |\vec{\Gamma A}|^2 + |\vec{\Gamma B}|^2 - 2\vec{\Gamma A}\cdot\vec{\Gamma B} = \beta^2 + a^2 - 2a\beta\cos\Gamma$$

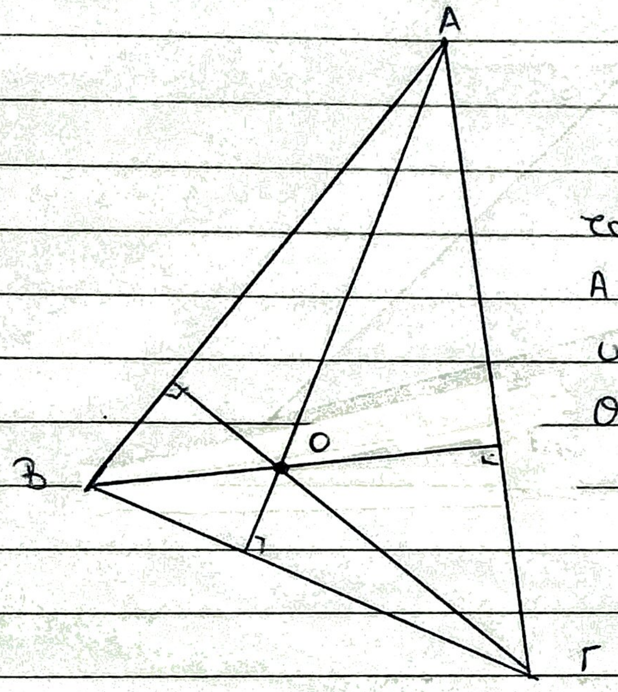
$$\vec{\Gamma A}\cdot\vec{\Gamma B} = |\vec{\Gamma A}||\vec{\Gamma B}|\cdot\cos(\vec{\Gamma A}, \vec{\Gamma B}) = \beta a\cdot\cos\underset{\overset{\parallel}{\Gamma}}{(a,\beta)}$$

No. Date

Εφαρμογη 2

Τα υψη ενος τριγωνου διερχονται απο το ιδιο σημειο

Εστω τυχαιο τριγωνο



Εστω O το σημειο τομης των υψων απο τα A, B αντιστοιχα. Αν φερω το υψος απο το Γ ⇒ αυτο θα διερχεται απο το σημειο O.

Προφανως εξ' ορισμου του "υψους" ⇒ AO καθετο στην ΒΓ αυτο σημαινει οτι: $\vec{OA}\cdot\vec{B\Gamma}=0 \Rightarrow \vec{OA}(\vec{O\Gamma}-\vec{OB})=0 \Rightarrow$

$\vec{OA}\cdot\vec{O\Gamma}-\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$ (1)

Επισης BO καθετο στην ΑΓ αυτο σημαινει οτι:

$\vec{OB}\cdot\vec{A\Gamma}=0 \Rightarrow \vec{OB}(\vec{O\Gamma}-\vec{OA})=0 \Rightarrow \vec{OB}\cdot\vec{O\Gamma}-\vec{OB}\cdot\vec{OA}=0$ (2)

→ Αρκει ν.δ.ο το $\vec{\Gamma O}$ καθετο στην $\vec{AB}$ δηλ $\vec{O\Gamma}\cdot\vec{BA}=0$

Αφαιρω κατα μελη (1) και (2):

$\vec{OA}\cdot\vec{O\Gamma}-\vec{OB}\cdot\vec{O\Gamma}-\vec{OA}\cdot\vec{OB}+\vec{OB}\cdot\vec{OA}=0 \Rightarrow \vec{OA}\cdot\vec{O\Gamma}-\vec{OB}\cdot\vec{O\Gamma}=0 \Rightarrow$

$\vec{O\Gamma}(\vec{OA}-\vec{OB})=0 \Rightarrow \vec{BA}\cdot\vec{O\Gamma}=0$ δηλαδη το $\vec{O\Gamma}$ υψος

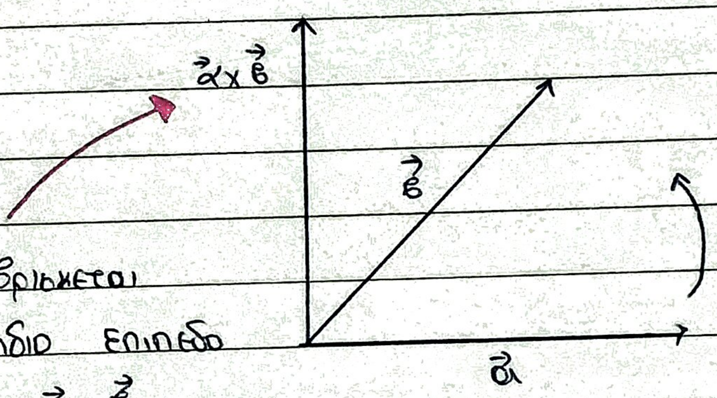
Εξωτερικο (διανυσματικο) γινομενο διανυσματων.

Ορισμος

Εστω διανυσματα $\vec{a}, \vec{b}$ και ϕ η γωνια αυτων. Τοτε οριζουμε με εξωτερικο γινομενο των $\vec{a}, \vec{b}$ ενα νεο διανυσμα (το οποιο θα συμβολιζουμε με $\vec{a} \times \vec{b}$) το οποιο διανυσμα

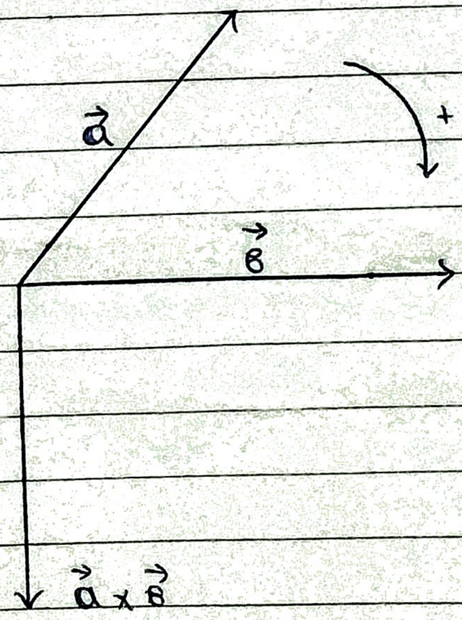
(1) εχει μετρο $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\phi$ και

(2) εχει φορα (διευθυνση): ειναι καθετο στο επιπεδο των $\vec{a}, \vec{b}$ και φορά τετοια ωστε το συστημα $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ να ειναι δεξιοστροφο



Δεν βρισκεται στο ιδιο επιπεδο με τα $\vec{a}, \vec{b}$

Αν ακολουθει αντιθετη φορα απο τους δεικτες του ρολογιου εχω δεξιοστροφο, αλλιως αριστεροστροφο.



Αριστεροστροφο